

研究ノート

Dual modelling cycle にもとづく小学校における 数学的モデリングの指導事例

川上 貴・佐伯昭彦¹・松寄昭雄²

(西九州大学子ども学部子ども学科, 鳴門教育大学大学院学校教育研究科¹, 埼玉大学教育学部²)

(平成26年1月9日受理)

A Mathematical Modelling Teaching Based on Dual Modelling Cycle Framework in Elementary School

Takashi KAWAKAMI and Akihiko SAEKI¹ and Akio MATSUZAKI²

*(Department of Children's Studies, Faculty of Children's Studies, Nishikyusyu University
Graduate School of School Education, Naruto University of Education¹
Faculty of Education, Saitama University²)*

(Accepted January 9, 2014)

西九州大学子ども学部紀要 第5号 別冊 (平成26年3月)

Journal of Children's Studies of Nishikyushu University No.5 (2014)

研究ノート

Dual modelling cycle にもとづく小学校における 数学的モデリングの指導事例

川上 貴・佐伯昭彦¹・松寄昭雄²

(西九州大学子ども学部子ども学科, 鳴門教育大学大学院学校教育研究科¹, 埼玉大学教育学部²)

(平成26年1月9日受理)

A Mathematical Modelling Teaching Based on Dual Modelling Cycle Framework in Elementary School

Takashi KAWAKAMI and Akihiko SAEKI¹ and Akio MATSUZAKI²

*(Department of Children's Studies, Faculty of Children's Studies, Nishikyusyu University
Graduate School of School Education, Naruto University of Education¹
Faculty of Education, Saitama University²)*

(Accepted January 9, 2014)

Abstract

We have implemented experimental lessons based on a dual modelling cycle framework in a Year 5 classroom. The purpose of this article is to arrange the lesson plan, protocols, and pupils' worksheets in order to get underlying data for further analysis and improvement of the teaching.

In this article, we showed the following:

- A design of the modelling teaching based on the dual modelling cycle framework: Didactical framework, teaching material, overview of the teaching, and teaching plan
- A fact of the modelling teaching: Protocols, pictures of the blackboard demonstration, pupils' worksheets, and classification of the pupils' solutions

Key Words : Dual modelling cycle デュアル・モデリングサイクル
Elementary school education 初等教育
Mathematical modelling 数学的モデリング
Ordinary helix 常螺旋

1. はじめに

学んだ算数を現実世界の問題解決に活用する能力の育成は、算数教育の重要な目標の1つである。筆者らは、その能力を育成するアプローチとして、小学校段階における数学的モデリング指導に着目してきた(例えば、川上・松壽, 2012; Kawakami, Saeki and Matsuzaki, 2012, 2013)。数学的モデリングとは、現実世界における問題の解決を1つの目標として、その問題を数学の世界に翻訳し数学的モデルをつくり、数学的に処理した結果を現実世界の場面で解釈・検討を行うといった現実世界と数学の世界とを往還する一連の活動である(cf. 松壽, 2008; 池田, 2010)。

筆者らは、「課題間のつながり」を活かす枠組みである「Dual modelling cycle」(Saeki & Matsuzaki, 2013; Matsuzaki & Saeki, 2013)にもとづき、小学校における数学的モデリングの指導を設計・実践した(Kawakami, Saeki and Matsuzaki, 2012, 2013)。課題間のつながりを活かした Dual modelling cycle を指導の中で意図することで、数学的モデリングに慣れていない児童にとっての解決の「足場(scaffolding)」をつくることや、児童の解法の「多様性(diversity)」, すなわち、児童が辿る数学的モデリング過程の「多様性」を保障し、それに対応することなどが期待できると考えたからである。

これまでに、上記の数学的モデリング指導における児童の解決方法について典型的事例を分析してきた(Kawakami, Saeki and Matsuzaki, 2012, 2013)。しかしながら、児童の解決方法は多様であることから、今後更に分析を進めていく必要がある。本稿では、今後の分析のための研究ノートとして、実践した数学的モデリング指導の学習指導案、授業プロトコル、児童のワークシート記述を整理する。

2. Dual modelling cycle にもとづく数学的モデリングの実験授業の設計

2.1 授業設計の枠組み

まず、「課題間のつながり」を活かす枠組みである「Dual modeling cycle」(Saeki & Matsuzaki, 2013)について概説する。この枠組みの特徴は、はじめに提示される現実世界における課題(「最初の課題」と呼ぶ)を解決するために、その課題と類似した、現実世界における別の課題(「類似の課題」と呼ぶ)を設定し、類似の課題の解決結果を参照して最初の課題の解決を目指す点にある。図式でいうと、最初の課題に取り組むのが「第1のモデリングサイクル」であり、類似の課題に取り組むのが「第2のモデリングサイクル」である(図1)。サイクルどうしの往還を通じて最初の課題の解決を目指すわけである。各サイクルは、Blum and Leiß (2007, p. 225)の数学的モデリングサイクルの図式¹⁾に依拠している。

なお、解決の進行によっては、類似の課題を必要としない場合(「第2のモデリングサイクル」を必要としない場合)もあり得る²⁾。さらに、各サイクルに示された1～7の過程は、図のような順序の通りに進むとは限らず、実際は各諸相を行き来することも報告されている(例えば、Borromeo Ferri, 2007)。図1の図式は、理想的なものであるけれども、本研究では、指導指針や児童の活動を捉える枠組みとしてそれを参照している。

2.2 授業で用いる教材

次に、本授業で用いる教材について概説する。「最初の課題」は、「オイルタンクの課題」である(図2)。

また、「類似の課題」としては、「トイレットペーパーの芯の課題」を設定する(図3)。この課題は、

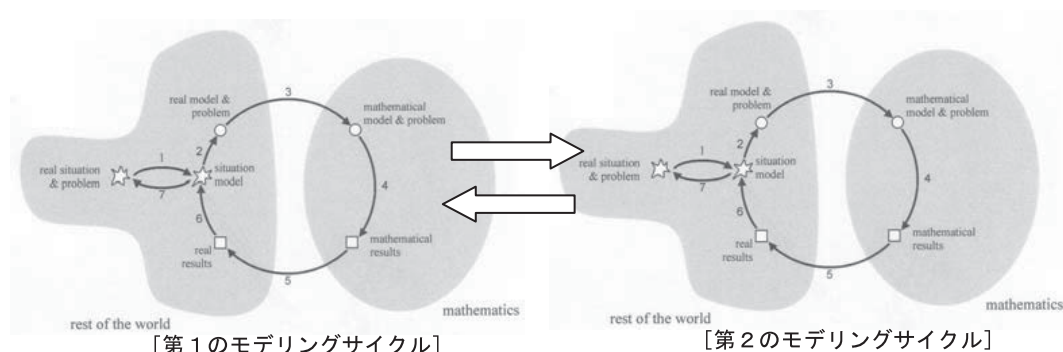


図1 Dual modelling cycle (Saeki & Matsuzaki, 2013, p. 91)

石油コンビナートには、円柱型のオイルタンクがたくさん並んでいます。写真にあるように、オイルタンクの周りには、タンクを点検したりするために昇らせん階段が取り付けられています。

この石油コンビナートの中には、高さが等しいけど直径が異なるオイルタンクがあります。これらのタンクのらせん階段の長さは、等しいでしょうか。ただし、どのらせん階段も、登る角度は等しいです。



図2 オイルタンクの課題①³⁾

オイルタンクのらせん階段の展開図がどうなっているのかははっきり分かりません。そこで、似ているトイレットペーパーの芯に着目しました。トイレットペーパーの芯を切り開くと、らせんの部分は、どんな展開図になっているのでしょうか。



図3 トイレットペーパーの芯の課題

オイルタンクの螺旋階段の長さを求めるために、オイルタンクと螺旋、トイレットペーパーの芯とそのつなぎ目（スリット）が、互いに似た形状である点に着目したものである。

さらに、上記の「トイレットペーパーの課題」の結果を参照して、再び「オイルタンクの課題」に取り組む（図4）。

トイレットペーパーの芯から分かったことを参考にして、高さが等しく直径が異なるタンクのらせん階段の長さは等しいかどうかを調べてみましょう。

図4 オイルタンクの課題②

なお、松寄（2012）では、本教材の解決過程を例示している。また、佐伯・松寄・川上（2013）では、本教材を含めた「円柱状の螺旋を探究する教材」について、戦前・戦後の教科書と先行研究の取扱いを分類している。

2.3 授業の全体像

（1）の Dual modelling cycle の枠組みにもとづいて、（2）の教材を用いた授業の全体像を示したものが図5である。

児童は、最初に「オイルタンクの課題」に取り組む。その際、すぐにオイルタンクの課題の解決方法

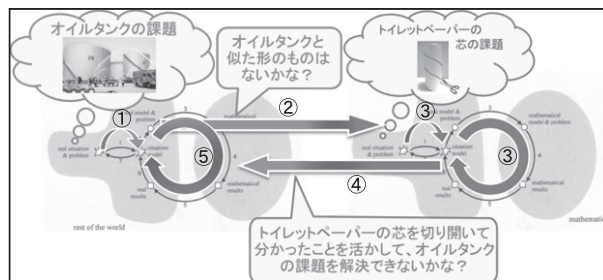


図5 Dual modelling cycle にもとづく授業の全体像

を掴めるとは限らない（図5の①）。そこで、オイルタンクと似た形のものはないかを問い、似た形の1つとしてトイレットペーパーの芯に着目する（図5の②）。これは、第1のモデリングサイクルから第2のモデリングサイクルへの転移である。次に、「トイレットペーパーの芯」に取り組む（図5の③）。そして、トイレットペーパーの芯を切り開いて分かったことを活かして、最初の「オイルタンクの課題」を解決できないかを問う（図5の④）。これは、第2のモデリングサイクルから第1のモデリングサイクルへの転移である。最後に、再び「オイルタンクの課題」の解決に取り組む（図5の⑤）。

2.4 授業の構成

2.4.1 授業のねらい

高さが等しい2つのオイルタンクの螺旋階段の長さが等しいかどうかを、身の回りまたは既習経験からその解決に必要なモデル（トイレットペーパーの芯など）を類推し、そのモデルの操作や探究を通して得た結果を用いることで判断することができる。

2.4.2 時期

平成24年10月25日、26日

2.4.3 対象

都内私立小学校第5学年の児童（33名）。児童は、平行四辺形などの図形の求積や円柱の性質については既習であるが、円柱の展開図や円周率については未習である。

2.4.4 指導計画とその意図

実験授業は、全3時間（45分×3）で構成し（表1）、第1著者が行う。本授業の学習指導案は、末尾の資料に載せている。

第1時

図2のオイルタンクの写真を提示し、階段のどの長さを測ればよいのか、課題に取り組むために必要な情報は何かといったことを児童に問いかけながら、写真にあるオイルタンクを単純化した、高さが

表1 指導計画（全3時間）

時	指導内容
1	・「オイルタンクの課題①」を把握する。 ・「オイルタンクの課題①」の解決の見通しを立てる。
2	・「トイレットペーパーの芯の課題」に取り組む。 ・「オイルタンクの課題②」に取り組む。
3	・「オイルタンクの課題②」の解決方法を発表する。 ・螺旋の長さが等しくなる理由を考える。

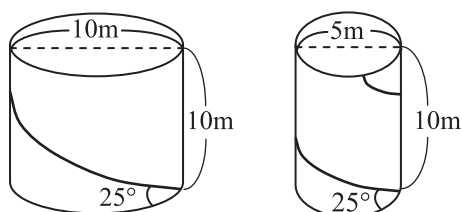


図6 オイルタンクのモデル

同じで直径の比が2：1のオイルタンクのモデル（図6）を提示する。このモデルでは、計算のし易さも考慮し、直径、高さ、階段の登る角度を設定している。

そして、図6のモデルをみて、どのように螺旋の階段の長さを比較すればよいかを問い、展開図を描くという意見を引き出す。そこで、螺旋も含めた円柱の展開図を作成させる。予想される展開図として、例えば、図7や図8のような長方形モデルが挙げられる。なお、ここで述べる「数学的な適切さ」とは、螺旋の数学的な定義⁴⁾にもとづいている。

図7の上段は、螺旋が一周または二周しない場合

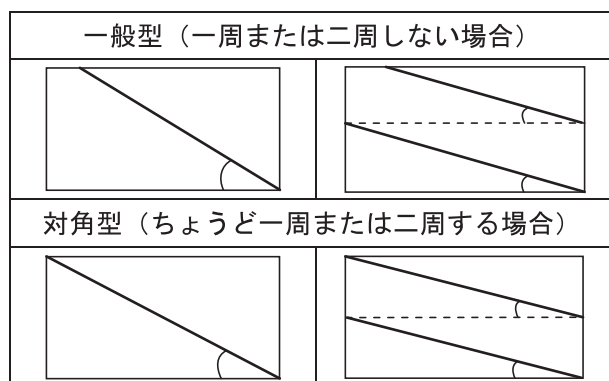


図7 数学的に適切な長方形モデルの例

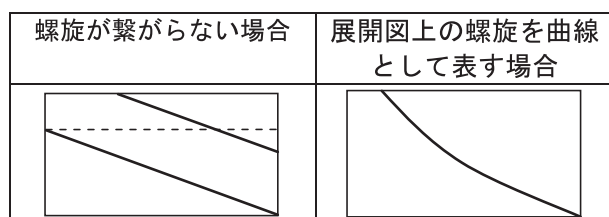


図8 数学的に適切ではない長方形モデルの例

（一般型と呼ぶ）の展開図である。また、図7の下段は、螺旋がちょうど一周または二周する場合（対角型と呼ぶ）の展開図である。一周以上する螺旋の場合は、図7の右上、右下の展開図にあるように、長方形の辺と螺旋との交点の高さが等しくなければ、円柱状にした際に螺旋が繋がらない点に留意する必要がある。

図8の左は、螺旋が繋がらない場合の長方形モデルである。これは、前述したように、長方形の辺と螺旋の交点の高さが等しくないため、円柱状にした際に螺旋が繋がらないわけである。図8の右は、展開上の螺旋を曲線として表している長方形モデルであるが、螺旋階段の傾き（勾配）が一定であるときは、展開図にした際に、螺旋は直線として表れることから誤りと言える。

図7のような長方形モデルのみで「オイルタンクの課題①」を解決しようとする、図9のように等積変形の考えを用いた方法が考えられる。図9をみると、どちらのタンクの螺旋も長さが等しいことを確認することができる。だが、図9のような解決方法をすぐに気付くとは限らない。むしろ、多くの児童は、長方形の展開図を描けても、そこに螺旋を適切に記すことが難しいことが予想される。

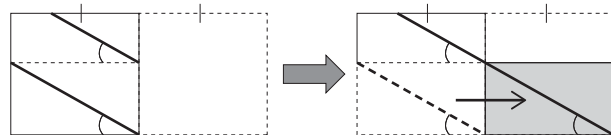


図9 長方形モデルを用いた解決例

第2時

長方形モデルを用いて直ちに解決することが困難であることを踏まえ、「トイレットペーパーの芯の課題」にも取り組む。トイレットペーパーの芯のスリットに沿って切り開くと、平行四辺形モデルをつくることができる。その際、立体物であるトイレットペーパーの芯と平面図である平行四辺形モデルの各部分の対応を確認しておく必要があろう（図10）。

そして、「トイレットペーパーの課題」の解決結

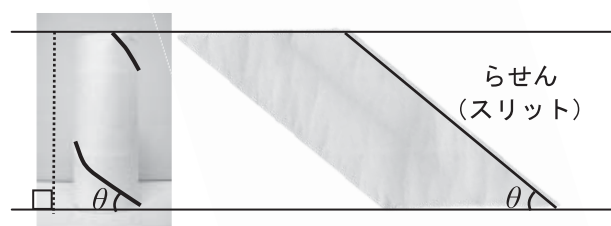


図10 トイレットペーパーの芯と平行四辺形モデルとの対応

果を参照して「オイルタンクの課題②」に取り組む。その際、平行四辺形モデル（図10）を用いた解決だけでなく、長方形モデルを用いた解決（図9）や両方のモデルを用いた解決もあり得る。また、児童は、元の直径の円柱と直径が2倍の円柱のそれぞれの平行四辺形の展開図を描き、螺旋の長さを実測することで、直径が異なっても螺旋の長さが等しいことに気付くこともできるだろう。

第3時

第2時で児童が行った解決方法を発表させる。その際、図1にある第1のモデリングサイクルと第2のモデリングサイクルとの関連性に気付かせるために、平行四辺形モデルを用いた解決方法と長方形モデルを用いた解決方法の両方を取り上げる。そして、螺旋が等しくなる理由をクラスで発表し合う。その際、長方形モデルを用いた説明（図9）だけでなく、平行四辺形モデルを用いた説明（図11）もあり得る。図11は、元の直径の円柱と直径が2倍の円柱のそれぞれの平行四辺形の展開図を重ねたものである。どちらの円柱も互いに高さと螺旋の角度が等しいので、展開図としての平行四辺形の斜辺が平行移動しているにすぎないこと、すなわち、どちらの円柱も螺旋の長さが等しいことを説明することができる。

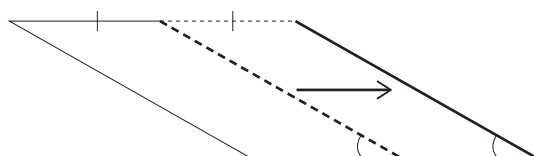


図11 平行四辺形モデルを用いた解決例

なお、発展的な扱いにはなるが、図9の長方形モデルを用いた解決例と図11の平行四辺形モデルを用いた解決例は、図12のように統合的に捉えることができる

3. 実験授業の実際

3.1 第1時

3.1.1 「オイルタンクの課題①」を把握する。

第1時のはじめに、「オイルタンクの課題①」（図2）を提示し、どちらのタンクの螺旋階段が長いのか、

あるいは、等しいかを簡単に予想させた。以下に、そのやりとりを示す。

T1：今現在の予想。等しいと思う人？

（3人程度挙手する）

T2：等しくないと思う人？

（それ以外の児童が挙手をする）

T3：等しくない人で、どちらの方が長いと思う？

こちら（直径が長い方）が長いと思う人？

（20人程度挙手をする）

T4：こちら（直径が短い方）の方が長いと思う人？

（3, 4人挙手をする）

T5：こちら（直径が長い方）の方が長いと思った人で簡単でいいから、理由言える人いる？

C1：だって、タンクの周りに螺旋階段が巻き付いてるってことは、直径がこっちの方が長いってことは、弧の長さもこっちの方が長いわけだから、螺旋階段も長い。

多くの児童は、直径の長いタンクの螺旋階段の方が長いと予想していた。C1の発言にあるように、直径の長さや螺旋階段の長さを比例的に捉えている児童が多いことが窺える。

さらに、図2の写真のオイルタンクを理想化・単純化するために、階段のどここの長さを測ればよいか投げかけた。以下に、そのやりとりを示す。

T6：階段の長さってどこ測る？

T7：手すりのところ。

C2：脚のところ。

C3：結んじゃえばいい。

C4：手すりだと、これが階段だとすると、ここにつけても、ここにつけても、（長さが）違う可能性がある。

T8：今の分かった？手すりってあったときに、この辺にあたり、この辺にあたりすると、階段の長さが変わっちゃうんじゃないかと。

T9：じゃあ、今日は、場合によっては、手すりでも考えてもいいかもしれないけど、今日は、この脚のところっていうのかな、脚のところを結

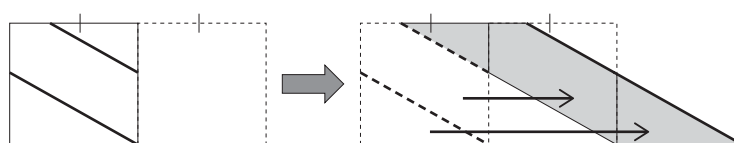


図12 長方形モデルと平行四辺形モデルとの関連

んだところの長さにしてみようか。

階段の長さを「手すり」や「脚のところ」の長さ
と見做す意見が出された。その際、手すりの長さ
と見做すと、外側の手すりと内側の手すりのど
ちらの長さで考えるかによって長さが異なっ
てしまうというC4の意見を受け、階段の脚の
部分を結んだ曲線の長さを階段の長さとする
ことをクラスで取り組めた。その上で、図6
のオイルタンクのモデルを提示した。

3.1.2 「オイルタンクの課題①」の解決の見通しを立てる。

クラス全体で「オイルタンクの課題①」の解決
の見通しを立てた。そのやりとりを以下に示す。

T10：これ、どうやって長さ調べればいい？実際に
10mのタンクをつくるのも大変だ。どうすれば
いい？

Cc5：縮尺。

C6：mをcmに直せばいいんじゃないですか。

T11：縮尺って言葉が出てきたけど、mをcmに直
す。

T12：縮尺で考えるときに、君たち、図描かない？

C7：展開図。

上記のように、オイルタンクの展開図を描くとい
う意見（C7）が出されたため、ワークシートに螺
旋も含めたオイルタンクの展開図を描かせた。児童
が描いた展開図は、すべて長方形モデルであった。
児童が作成した長方形モデルを分類・整理したもの
が表2⁵⁾（後掲）である。数学的に適切なモデルを
作成した児童の人数と数学的に適切ではないモデル
を作成した児童の人数は、ほぼ同数であった。数学
的に適切ではないモデル（一般型）の例としては、
図13のように螺旋が繋がらないものがみられた。ま

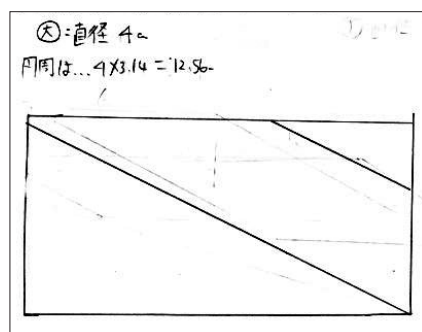


図13 数学的に適切ではない長方形モデルの例

た、数学的に適切ではないモデルを作成した16人の
児童のうち、5名の児童が螺旋を曲線で描いていた。

児童が展開図を描き終わった後に、実際に紙を円
柱状に丸めて螺旋がつながるかを確認させ、螺旋を
曲線と捉えている児童もいたため、クラス全体にお
いて、螺旋は展開図上では直線になることを確認し
た。

3.2 第2時

3.2.1 「トイレットペーパーの芯の課題」に取り組む。

第2時では、他の展開図による方法もないかを投
げかけた。以下に、そのやりとりを示す。

T13：今解決したいのは、螺旋の長さが等しいかど
うかっていうことで、直径の長い円柱と直径の
短い円柱をつくって長さが本当に等しいかを比
べればできそうだな。でもさ、みんな長方形
の展開図描いたんだけど、長方形の展開図を
使って螺旋の長さを上手く比べられそう？線も
分かれている場合もあるし。例えば、円柱を切っ
た時に、他の形の展開図にもならないかな？円
柱を上手く切ったときにさ、螺旋の長さを知り
たいんだよね。螺旋の長さを上手く調べられる
ようにするにはさ、この円柱を、上手い切り方
をすると、上手い形に。

C8：三角形。

（反応が少ない）

T14：じゃあ、今、君たちの周りでさ、螺旋の模様
にきれいになっているもの、しかも切り開ける
ものってない？

C9：じゃがいも。じゃがいもの芽が螺旋になっ
てる。

C10：ボールペン。インクのを取り換えるやつ。

T15：でも切れる？切れるもの。

C11：ペットボトル。

C12：トイレットペーパー（の芯）。

T16：今、言ってくれたけど、トイレットペーパー
の芯。

Cc13：ああ〜。（納得の様子）

C14：確かに。

上記のように、螺旋の長さを比較しやすくするた
めには、円柱の展開図は長方形以外にもならないか
を投げかけたが、児童の反応があまり返ってこな

かった。そのため、長方形以外の展開図を考えるために、身の回りで螺旋の模様になっていて切り開けるものはないかを問いかけた。C12の発言を受けて、多くの児童は、トイレットペーパーの芯に螺旋の模様があることを想起した。しかしながら、この場面において、長方形以外の展開図でも考えることが教師による誘導になってしまった。そのため、児童が長方形以外の展開図でも考える必然性を実感していたとは言いきれない。今後の実践に向けた修正案として、長方形モデルを用いて課題①に取り組む時間を確保し、長方形モデルを用いた解決の困難性を実感させた上で、別の解決方法として他の展開図を模索するという流れにすることが考えられる。

そして、オイルタンクとトイレットペーパーの芯の類似している点も確認した上で、各自にトイレットペーパーの芯を配布し、「トイレットペーパーの芯の課題」に取り組ませた。その際、つなぎ目に沿って切ることは言わずに、どのように切るかも考えさせた。すると、児童からつなぎ目（螺旋）に沿って切つてよいかという意見が出され、展開図が平行四辺形にもなることにクラスが気付いていった。以下に、そのやりとりの一部を示す。

T17：じゃあ、長方形以外の展開図を考えて、ここが円周になるよ、高さになるよ、この辺が25°になってるよっていうのを考えてもらいます。それを考えるときに、このトイレットペーパーの芯を上手く切り開いて、考えてみてください。

C15：先生、どうやって切るの？

T18：どうやって切ればいいのかは考えて下さい。調べたいのは、螺旋の長さを調べたいんだよね。（螺旋上に切ってもいいのかという意見が出る）

T19：いいよ、いいよ、螺旋上に切ったらどんな形になるの？

（4、5人はスリットに沿って切り始める：図14）

C16：先生、螺旋上に切ったら三角形になる。

T20：螺旋上に切ったら、三角形になる？ちょっと切ってみて、実際に。

C17：なんなかった。平行四辺形になった。

C18：あっ、平行四辺形だ。

（数人、平行四辺形とつぶやき始める）

上記のようなやりとりもあり、ワークシートに記



図14 スリットに沿って切り開く児童

述した児童はみな展開図として平行四辺形モデルを作成した。但し、児童が作成したモデルには、見取り図と展開図とが正しく対応づけられているものとそうではないものとがあった。表2の長方形モデルの分類に倣い、前者を「数学的に適切なモデル」、後者を「数学的に適切ではないモデル」と呼び、表3⁶⁾（後掲）にまとめた。約8割の児童が、数学的に適切なモデルを作成することができていた。数学的に適切ではないモデルの例としては、円柱における螺旋部分と円周部分がともに平行四辺形の斜辺に位置づくこと捉えてしまっているものがみられた（図15）。

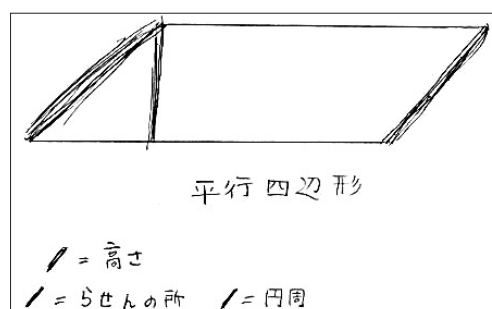


図15 数学的に適切ではない平行四辺形モデルの例

また、平行四辺形モデルを発表した際に、平行四辺形の向きによって、円周と螺旋との位置関係が変わるため、児童が混乱してしまった。切り開く前にトイレットペーパーの芯のスリット部分と円周部分を色でなぞらせるなど、切り開いた後でも、切り開く前のトイレットペーパーの芯の各場所と対応できるように手だてが必要であった。

3.2.2 「オイルタンクの課題②」に取り組む。

児童は、「トイレットペーパーの芯の課題」の解決結果も参考にして、再び、どちらのオイルタンクの螺旋の方が長いかを考えた。児童が「オイルタンク課題②」に取り組んだ結果を整理したものが表4（後掲）である。解決できた児童の人数と解決できなかった児童の人数は、ほぼ同数であった。児童が

解決に用いたモデルによってそれぞれ3つに分類した。TypeAの児童(10人:30%)は、図11のように平行四辺形モデルと斜辺の平行移動といった数学的なアイデアを用いて解決していた。TypeBの児童(5人:15%)は、図9のように長方形モデルと等積変形といった数学的なアイデアを用いて解決していた。TypeCの児童(1人:3%)は、平行四辺形モデルと長方形モデルを用いて展開図を実測することで解決していた。一方、TypeDの児童(4人:12%)は、平行四辺形モデルを用いて解決しようと試みたものの、解決には至らなかった。TypeEの児童(9人:27%)は、長方形モデルを用いて解決しようと試みたものの、解決には至らなかった。TypeFの児童(4人:12%)は、それら以外のモデルを用いて解決しようと試みたものの、解決には至らなかった。

3.3 第3時

3.3.1 「オイルタンクの課題②」の解決方法を発表する。

最初に、面積を求めて解決しようとした方法を取り上げた(図16)。しかしながら、児童が有する数学的な知識・技能では平行四辺形の高さを計算で求めることが出来ず、「計算(面積)では難しい」ことで意見が一致した。

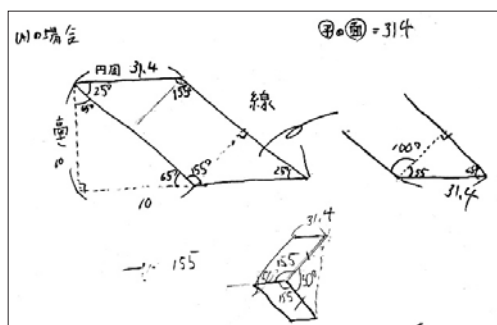


図16 面積を用いて解決を試みた例

次に、平行四辺形モデルや長方形モデルを作成し、螺旋の箇所の長さを実測することで等しいことを説明する方法を取り上げた(図17, 図18)。これらの結果から、「オイルタンクの課題」の結論として、「高さが同じで直径の比が2:1のオイルタンクの螺旋の長さは等しい」ことを確認した。

3.3.2 螺旋の長さが等しくなる理由を考える。

上記で確認した結論は、あくまで経験的なものであるため、「なぜ螺旋の長さが等しくなるのか」、「直

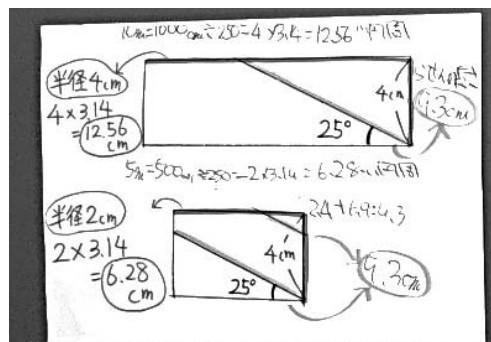


図17 長方形モデルを用いて実測する解決方法

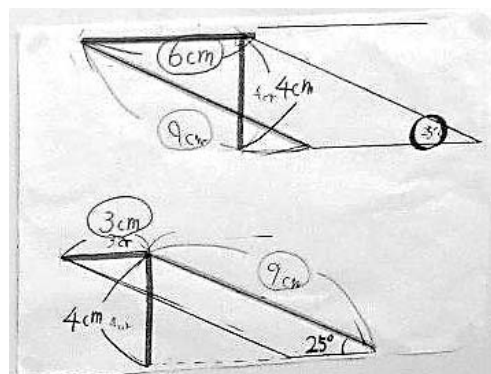


図18 平行四辺形モデルを用いて実測する解決方法

径の長さを自由に変えても等しくなるのか」を投げかけ、ワークシートに記述させた。そして、長方形モデルを用いた説明(図19)と平行四辺形モデルを用いた説明(図21)を児童に黒板上で説明させた。

図19を説明した児童(Kob)は、直径の比が4:1の2つのオイルタンクを設定し、面積比と等積変形を用いて螺旋の長さがどちらも等しくなることを説明しようとした。しかしながら、複数の数学的なアイデアが入り組んだ説明であったため、クラス全体で共感することは困難であった。そこで教師が、直径の比を2:1とした場合で等積変形のアイデアを用いて考えていた別の児童(Tomi)の方法(図20)を取り上げ、以下のように説明した。

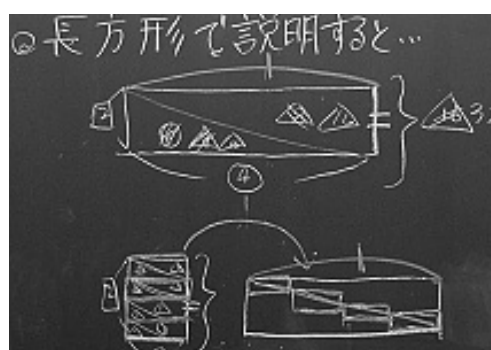


図19 長方形モデルを用いた説明

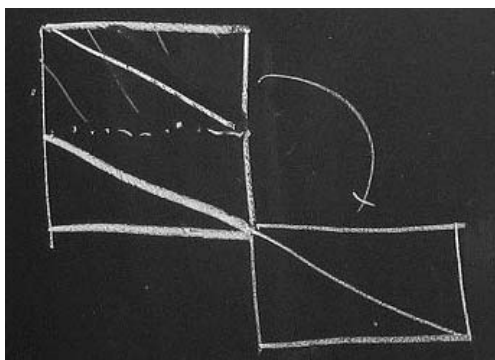


図20 等積変形を用いた説明

T21: Tomi 君は、ここ(図20の点線部分)でチョッキンして、上のこの部分を下に移動しました。移動すると、この部分(図20の螺旋部分)が、繋がるんじゃないかということでした。これ分かる?

Cc19: 分かる。

T22: Tomi 君は、2倍のことで説明してくれました。じゃあ、3倍、4倍どうなるのか説明してくれたら Kob 君の説明と繋がるのかもしれないね。

図21を説明した児童(C20)は、円周の長さを変えても、螺旋が平行移動するだけであるため、直径がどんなに長くなっても螺旋の長さは等しいことを以下のように説明した。クラス全体においても、「(螺旋の)平行移動」(Cc21)のアイデアは、先述の等積変形のアイデア(図20)に比べて理解し易かったように見受けられた。

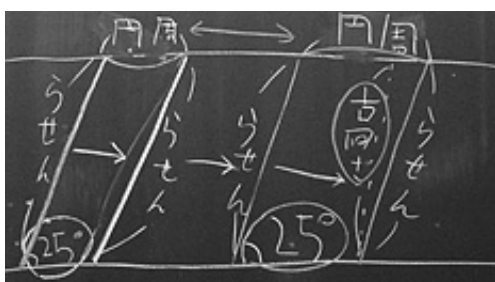


図21 平行四辺形モデルを用いた説明

C20: この螺旋の部分がたぶんおんなじで、高さとか角度さえ、えっとおんなじだから、平行四辺形のここ(斜辺)はたぶんおんなじだと思います。

T23: そうすると、この螺旋の長さは何移動する?

Cc21: 平行移動。

T24: うん、平行移動するよね。平行指導するから螺旋の長さが変わらないんだよっていうことを

言ってくれました。

上記の発表後に、各自においても、3時間の授業を通じて分かったことや考えたことをもう一度振り返り記述させた。この時点での「オイルタンクの課題」に対する解決結果と第2時終了時点での解決結果とをクロス集計したものが表5(後掲)である。第2時終了時点で未解決であった児童17人のうち、5人がクラスでの話し合いを踏まえて解決に至ったことが窺える。その5人の解決方法を示したものが表6(後掲)である。4人の児童が、平行四辺形モデルを自分なりに解釈し、結論を導いていた。平行四辺形モデルと長方形モデルの両方を解釈し、結論を導いていた児童は1人のみであった。また、残り12人が依然未解決であった。これら12人のうち、8人は記述がなかった。残り4人は、長方形や平行四辺形の展開図を描くものの解決には至らなかった。今後、これらの児童にとって何が困難であったのかを分析し、その困難性に対する手だてを講じていく必要がある。

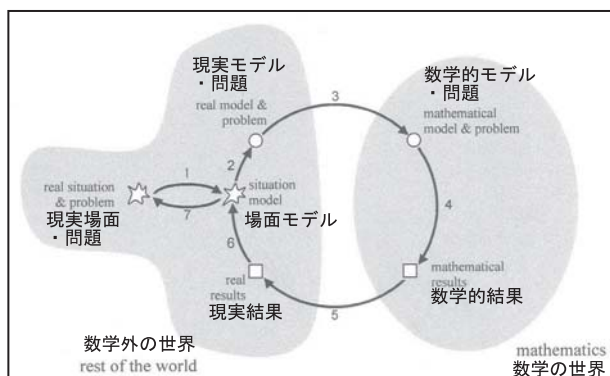
授業の最後には、「角度と高さが同じであれば、直径が何cmであろうと、螺旋の長さが同じ」であることをクラス全体でまとめた。

4. おわりに

本稿では、今後の分析のための研究ノートとして、Dual modelling cycle にもとづく数学的モデリング指導の学習指導案、授業プロトコル、児童のワークシート記述を整理した。本稿で整理した資料にもとづき、児童の取組を詳細に分析していくと共に、今回実践した授業の更なる修正・改善に繋げていきたい。

註

- 1) 下記のモデリングサイクルの図式である(Blum & Leiß, 2007, p. 225)。数学的モデリングの各過程は、次の通りである: 「1 構成化 (constructing)」、 「2 単純化/構造化 (simplifying/structuring)」、 「3 数 学 化 (mathematising)」、 「4 数学的作業 (working mathematically)」、 「5 解釈 (interpreting)」、 「6 評価 (validating)」、 「7 解説 (exposing)」。
- 2) Dual modelling cycle の枠組みでは、第1のモ



デリングサイクルのみを遂行する場合を「Single modelling cycle」、第2のモデリングサイクルへ転移するものの、第1のモデリングサイクルに転移されない場合を「Double modelling cycle」と呼んでいる (Saeki & Matsuzaki, 2013)。

- 3) 左図の出典は, <http://blogs.yahoo.co.jp/isseidish/28036173.html> (平成26年3月18日現在), 右図の出典は, <http://blog.goo.ne.jp/kobeooi/e/b021c971381154725fc3ee4a3d645aa8> (平成26年3月18日現在) である。
- 4) 本稿で述べる「螺旋」とは, 常螺旋 (ordinary helix) を指す。『岩波数学辞典第4版』(日本数学会, 2007) では, 2次元曲線の「螺旋」を渦巻線, 螺線, スパイラル, 3次元曲線の「螺旋」を常螺旋もしくは蔓巻線と呼んでいる。常螺旋もしくは蔓巻線は, 直円柱の母線を(直角ではない)一定の角で切るときにできる曲線として定義している。
- 5) 展開図を2つ描いていて, 一方が数学的に適切であるものの, もう一方が数学的に適切ではない場合は, 数学的に適切ではないモデルの方に集計した。
- 6) 1人のみ無記入の児童がいたため, 表3では, 集計から除外している。

引用・参考文献

- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics (ICTMA 12)* (pp.222-231). Chichester: Horwood.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. In C. Haines et al., (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineer-*

ing and Economics (ICTMA 12) (pp.260-270). Chichester, UK: Horwood.

- 池田敏和 (2010). 数学的モデル化. 日本数学教育学会 (編), *数学教育学研究ハンドブック* (pp. 271-281). 東洋館出版社.
- 川上貴・松寄昭雄 (2012). 小学校における数学的モデリングの指導の新たなアプローチ—現実世界の課題場面からの問題設定に焦点をあてて—. *日本数学教育学会誌*, 94 (6), 2-12.
- Kawakami, T., Saeki, A., & Matsuzaki, A. (2012). Necessity for modelling teaching corresponding to diversities: Experimental lessons based on dual modelling cycle framework for the 5th grade pupils. *ICME-12 Pre-proceedings* (pp.3291-3300). Seoul: ICME.
- Kawakami, T., Saeki, A., & Matsuzaki, A. (2013). How do students share and refine models through dual modelling teaching? Students who could not solve independently, *Abstracts of the 16th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, 49.
- 日本数学会編 (2007). *岩波数学辞典第4版*. 岩波書店.
- 松寄昭雄 (2008). 数学的モデリング能力の特定方法に関する研究—原場面への着目と課題分析マップの援用—. *筑波教育学研究*, 6, 119-133.
- 松寄昭雄 (2012). 算数のつながりを生かした指導. *算数教育研究協議会用テキスト第45集* (pp. 9-29), 埼玉県算数数学教育研究会小学校部会.
- Matsuzaki, A. & Saeki, A. (2013). Evidence of a dual modelling cycle: Through a teaching practice example for pre-service teachers. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp.195-205). New York: Springer.
- 佐伯昭彦・松寄昭雄・川上貴 (2013). 円柱上の螺旋を探究する教材に内在する数学的知識のつながり. *2013年度数学教育学会秋季例会発表論文集*, 65-67.
- Saeki, A. & Matsuzaki, A. (2013). Dual modelling cycle framework for responding to the diversities of modellers. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Mod-*

表 2 児童が作成した長方形モデル

	数学的に適切なモデル			数学的に適切ではないモデル			
人数（割合）	17（52％）			16（48％）			
タイプ	一般型	対角型	一般型・ 対角型併用	一般型	対角型	一般型・ 対角型併用	その他
人数（割合）	12人（37％）	2人（6％）	3人（9％）	7人（21％）	4人（12％）	1人（3％）	4人（12％）

表 3 児童が作成した平行四辺形モデル

	数学的に適切な モデル	数学的に適切で はないモデル
人数（割合）	25人（76％）	7人（24％）

表 4 「オイルタンクの課題②」に対する児童の解決結果とその方法（2時間目終了時点）

解決結果	自力で解決できた			自力で解決できなかった		
人数（割合）	16人（48％）			17人（52％）		
使用したモデル	TypeA	TypeB	TypeC	TypeD	TypeE	TypeF
	平行四辺形モデル	長方形モデル	両モデル	平行四辺形モデル	長方形モデル	その他のモデル
人数（割合）	10人（30％）	5人（15％）	1人（3％）	4人（12％）	9人（27％）	4人（12％）

表 5 「オイルタンクの課題②」に対する解決の変容（3時間目終了時点）

2時間目 \ 3時間目	解決	未解決	計
解決	16人		16人
未解決	5人	12人	17人
計	21人	12人	33人

表 6 3時間目終了時点で解決に至った5人の児童の解決方法

使用した モデル	平行四辺形 モデル	長方形モデル	両モデル
人数	4人	0人	1人

数学的モデリング研究授業指導案（45分×3）

【授業のねらい】

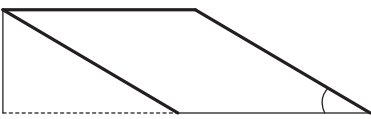
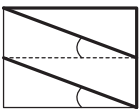
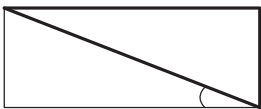
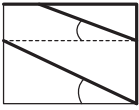
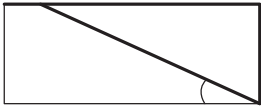
高さが等しい2つのオイルタンクのらせん階段の長さが等しいかどうかを、身の回りまたは既習経験からその解決に必要なモデル（トイレットペーパーの芯など）を類推し、そのモデルの操作や探究を通して得た結果を用いることで判断することができる。

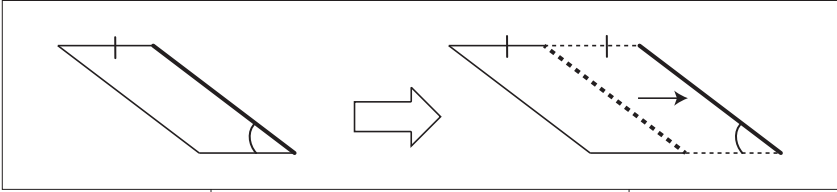
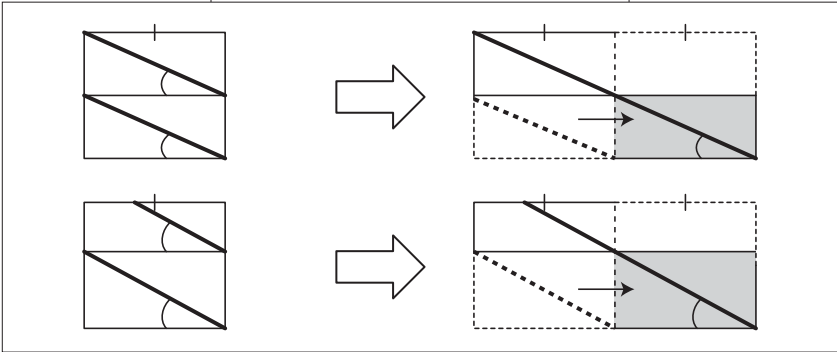
【準備】 白紙，工作用紙，はさみ，分度器，定規，トイレットペーパーの芯，ワークシート

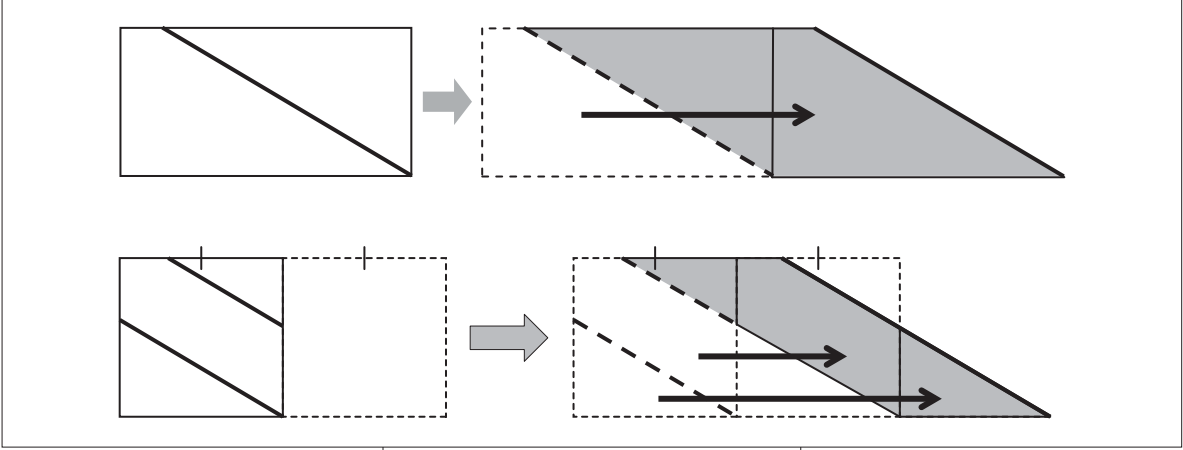
【展開】（3時間連続で表示）

指導内容と主な発問	予想される主な反応	指導の重点及び留意点
【第1時】 1. オイルタンクの課題を提示する		・石油コンビナートの写真を提示する ・階段の登る角度について簡単に説明する
オイルタンクの課題① 石油コンビナートには、円柱型のオイルタンクがたくさん並んでいます。写真にあるように、オイルタンクの周りには、タンクを点検したりするために昇らせん階段が取り付けられています。   この石油コンビナートの中には、高さが等しいけど直径が異なるオイルタンクがあります。これらのタンクのらせん階段の長さは、等しいでしょうか？ただし、どのらせん階段も、登る角度は等しいです。		
「今回は、単純化して考えて、タンクの側面と接しているところを階段の長さとしましょう」 「半径が小さいタンクと半径が大きいタンクを図にしました」 「このような立体を円柱と言います」	「階段の長さって言っても、どこの長さを測ればよいの？」 「手すりのところ？」 「段の長さすべて？」 「すべて細かく測るには大変だよ」 「階段を1つの線とみることにするね」	・子どもたちから出なければこちらから投げかける ・単純化することで、実際の長さと異なってしまうかもしれないが、タンクの階段をみな線とみれば比較のときに差が出ないことを確認する ・直径，高さ，階段の角度の数値は、理想化したものであることを説明する ・円周と高さの意味と位置を説明する

円周 10m 高さ 10m らせん 25° 直径の長いタンク 5 m 10m 25° 直径の短いタンク														
「直観的に、どちらも、らせん階段の長さは等しいと思いますか？」 2. 解決の見通しを立てる 「どうやって長さが等しいかどうかを調べればよいでしょうか？」 「ミニタンクの展開図は、それぞれどんな形になるかプリントに描いてみましょう」	「等しいと思う」 「直径が長いんだから階段の長さも長いと思う」 「タンクの展開図をかいてみる」 「実物大は描けないよ」	・理由があれば、口頭で発表してもらい、板書しておく ・とりあえず展開図（縮尺モデル）をつくって不都合が生じれば、また考えるという方向性に話し合いをもっていく ・ここでは、形に焦点をあてる												
<table><tr><th colspan="2">数学的に適切な展開図</th><th colspan="2">数学的に適切ではない展開図</th></tr><tr><th>①直線タイプ（1）</th><th>②直線タイプ（2）</th><th>③直線タイプ（3）</th><th>④曲線タイプ</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>		数学的に適切な展開図		数学的に適切ではない展開図		①直線タイプ（1）	②直線タイプ（2）	③直線タイプ（3）	④曲線タイプ					
数学的に適切な展開図		数学的に適切ではない展開図												
①直線タイプ（1）	②直線タイプ（2）	③直線タイプ（3）	④曲線タイプ											
「実際にらせん状になるか確かめてみましょう」 「らせん階段を展開図にするとどうなるのか悩みますね。オイルタンクは切り開けませんからね。みんなの身の回りに、手にとれるぐらいの大きさで、このオイルタンクと似たものはないかな？」 「実際にオイルタンクとトイレットペーパーの芯を比べてみてどんなところが似ていますか？」 「オイルタンクで考える代わりに、トイレットペーパーの芯で考えてもよいですね」	「上手くらせん状にならない」 「階段は曲線かな？直線かな？」 「端がずれてる」 「トイレットペーパーの芯」 「サランラップの芯」 「どちらも円柱」 「芯にもらせんの線が入ってる」 「オイルタンクを小さくしてみた」	・①（1）や（3）の反応をした児童を把握する ・①（1）や（3）をとりあげ、ワークシートを丸めるか、別の紙に展開図を描いて切って確かめる ・芯を子どもたちに配布し、芯とオイルタンクとの構造が似ていること（大きさが異なるが、円柱であること、らせん模様があることが共通していること）を手元で確認させる												
【第2時】 3. トイレットペーパーの芯の構造を調べる														

トイレットペーパーの芯の課題 オイルタンクのらせん階段の展開図がどうなっているのかはつきり分かりません。 そこで、似ているトイレットペーパーの芯に着目しました。 トイレットペーパーの芯を切り開くと、らせんの部分は、どんな展開図になっているのでしょうか？		
「トイレットペーパーの芯を切り開いた結果、らせん部分は直線になること、切り目で切ると平行四辺形になることが分かりました」	「トイレットペーパーを切り開いたら、らせんの部分は、直線になっていた」 「トイレットペーパーの切れ目で切ると平行四辺形になった」 「らせんの部分が平行四辺形の斜辺になっている」	・オイルタンクのらせん階段の展開図を考えるための課題であることを確認する ・長方形の展開図と平行四辺形の展開図を発表してもらう ・円柱の底面の円周が平行四辺形の横の辺にあたること、階段の角が平行四辺形の底角にあたること、階段の長さが平行四辺形の斜辺にあたることを確認させる
4. 芯を使ってオイルタンクの課題を解決する		
オイルタンクの課題② トイレットペーパーの芯から分かったことを参考にして、高さが等しく直径が異なるタンクのらせん階段の長さは等しいかどうかを調べてみましょう。		
「ワークシートに展開図や課題に対する答えをかきましょう」 「展開図の長さはどうすればよいでしょうか？」 「展開図をかいたら、実際に円柱になるか、階段がつながるか確かめてみましょう」	「半径が2倍の関係になるように考える」 「展開図の縦の長さ（円柱の高さ）は等しくする」	・必要に応じてペア（周囲）と相談する時間を設ける ・直径と高さは、単純な長さを各自が設定すればよいことを伝える（ただし直径の長さは実物のタンクの長さと同比） ・どちらのタンクも階段の角度は25°とする ・困難を示している子には、工作用紙を渡し、ミニタンクをつくるよう促す ・早くできた数人には、発表用の工作用紙で平行四辺形の展開図で考えた場合や長方形で考えた場合をかいてもらう ・直径を3倍すると円周の長さに近い値を求めることができることを説明する
 直径の短いタンク  直径の長いタンク  直径の短いタンク  直径の長いタンク  直径の短いタンク  直径の長いタンク		

「直径の短いタンクと直径の長いタンクのらせん階段の長さは等しかったですか？」	「実際にらせん階段の部分の測って見たら等しかったです」	
【第3時】 5. らせん階段の長さが等しくなる理由を考える 「なぜ直径の長さ（展開図の横の長さ）が2倍で異なるのに、らせん階段の長さは等しくなるのでしょうか？」	「平行四辺形の高さと底角を変えずに直径の長さ（横の長さ）だけを2倍にすることは、斜辺を変えずに横の長さを2倍していることになるから」 「螺旋の平行移動」	・書いてもらった発表用の展開図を黒板に掲示する。長方形で考えた子がいれば簡単にふれる ・高さと螺旋の角度は変わらず、横の長さだけが変わっている点を確認する
		
「直径の短いタンクを横に2つ並べて、点線のところで下側の螺旋を横に移動すれば、らせんが1本につながるから」 「螺旋の平行移動」		
		
「みんなはミニタンクで考えたけど、実物大のタンクでも同じことが言えますか？」 「直径を2倍以外の長さを作った人はいますか？いたら分かったことを発表してください」 「なぜ直径の長さを色々変えても、螺旋の長さは変わらないのでしょうか？」	「螺旋が平行移動しているだけだから長さが等しいんだ」 「平行四辺形でも長方形でも理由を説明することができるんだ」 「言えます」 「直径を3倍や4倍にしても等しくなりました」 「直径をどんな長さにしても等しくなります」 「平行四辺形の高さと底角を変えずに直径の長さ（横の長さ）だけを大きくすることは、斜辺を変えずに横に伸ばしていることになるから」	・どんな大きさでも、高さと底角を変えずに直径の長さだけを2倍にすることは、横の長さだけ2倍になり、螺旋は平行移動されることをまとめる ・もしいなければ、教師側から3倍や4倍の例を紹介する ・一般化のアイデアが出てこなければ、教師側が誘導するか、時間がなければ、教師側が説明する

	「長方形の横の長さをどんどん短くしても、らせんが細かく等分されて、螺旋の巻き数が増えるだけだから」	・最後に、補足として、黒板で厚紙を使うか、または、パワーポイントで、長方形の展開図から平行四辺形の展開図への等積変形を説明する
		
		・簡単に一連の解決してきた流れを子どもたちと振り返りながら、まとめを行う
まとめ ・直径が異なっても高さやらせん階段の登る角度が等しい円柱は、どれらせん階段の長さが等しいことが分かりました。 ・何か調べたいものがあるけど大きかったり手に触れられないようなときには、身の回りからそれと似たもので、手に触れられるもの（今回はトイレトペーパーの芯）を見つけて、それを操作したり調べたりして分かったことを活かせば解決できることが分かりました。		